CÁTEDRA

Enseñanza de la matemática en la educación superior

Ricardo Cantoral*

Presentación

La enseñanza en general y la de las matemáticas en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea. Con el paso del tiempo, las sociedades han conformado instituciones, con la finalidad de articular el saber científico y matemático con la cultura de la sociedad, buscando propiciar en la población una visión científica del mundo.

Este artículo presenta una interpretación de aspectos relativos a la enseñanza de la matemática del nivel universitario. Se conforma de tres partes principales: la primera se centra en el examen de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La segunda encara, desde una perspectiva macro, la estructura del sistema educativo nacional y el papel que en ella desempeña la enseñanza de la matemática. Por último en la tercera se analizan algunos aspectos referentes a las relaciones entre enseñanza, texto escolares y prácticas docentes. Debemos aclarar que este ensayo no pretende ser exhaustivo en cuanto a brindar un panorama del estado que guarda la enseñanza de la matemática en la educación superior, aunque sí aspira a brindar una perspectiva sugerente y contemporánea de algunos aspectos tanto a los docentes de matemáticas como a los interesados en el campo de la investigación educativa.[1]

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Este apartado se refiere al examen de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en tanto actividades de naturaleza social. Se centra en el estudio de los procesos del pensamiento matemático que se producen en el curso de una relación didáctica, es decir una relación que trata de aquello que el profesor se propone enseñar en matemáticas y lo que en efecto los estudiantes son susceptibles de aprender. Nuestro objetivo es explorar el sentido que tiene el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes en el transcurso de la enseñanza.

Cuando hablamos del pensamiento humano, del razonamiento, de la memoria, de la abstracción o, más ampliamente, de los procesos mentales, dirigimos nuestra mirada hacia la sicología y el estudio de las funciones mentales. Para los sicólogos, las preguntas: ¿cómo piensan las gentes? ¿cómo se desarrollan los procesos del pensamiento? o ¿en qué medida la acción humana adquiere habilidad en la resolución de ciertas tareas? constituyen la fuente de reflexión y experiencia cotidianas. De manera que el pensamiento como una de las funciones mentales superiores se estudia sistemática y cotidianamente en diversos escenarios profesionales.

De qué podría tratar entonces el pensamiento matemático. Sabemos, por ejemplo, que la sicología se ocupa de entender cómo aprende la

*Investigador titular del Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (DME-Cinvestav, IPN); miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias.

gente y cómo realizan diversas tareas o cómo se desempeñan en su actividad. De este modo, usaremos el término pensamiento matemático para referirnos a las formas en que piensan las "gentes matemáticas".

Los investigadores sobre el pensamiento matemático se ocupan de entender cómo piensa la gente un contenido específico, que en nuestro caso son las matemáticas. Se interesan por caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos matemáticos.

Este interés por estudiar la sicología del pensamiento matemático es relativamente nuevo, aunque podríamos decir que es, sobre todo, alentador, pues con ello se abriga la esperanza de que el desarrollo de este programa de investigación mejore de manera significativa los procesos educativos en matemáticas en los distintos niveles de los sistemas escolares contemporáneos.

Dado que la actividad humana involucra procesos de razonamiento y factores de experiencia cuando se desempeñan cualquier clase de funciones, nos interesa que al hablar de pensamiento matemático nos ubiquemos en el sentido de la actividad matemática como una forma especial de actividad humana. De modo que debemos interesarnos por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática, del mismo modo que nos ocupamos por descifrar los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen en la formación de los pensamientos matemáticos. Nos interesa entender, aun en el caso de que su respuesta a una pregunta no se corresponda con nuestro conocimiento, las razones por las que su pensamiento matemático opera como lo hace. De este modo, habremos de explicar con base en modelos mentales y didácticos, las razones por las que persistentemente los alumnos consideran que 2^0 es 0 aunque su profesor insista en que $2^0=1$; o bien que consideren que $(a+b)^2 = a^2+b^2$ y no, como lo dicen los textos, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

En este sentido es que nos interesa analizar las ejecuciones de los alumnos ante tareas matemáticas, tanto simples como complejas, como formas de entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos, al mismo tiempo que sabremos que en esa labor su propio pensamiento matemático está también en pleno curso de constitución.

Durante las últimas décadas ha surgido esta perspectiva teórica para los asuntos educativos. En nuestra opinión, esta idea permite desentrañar la naturaleza del conocimiento matemático en toda actividad humana. Hace ya algún tiempo, destacados matemáticos profesionales, como Hadamard, Poincaré, Polya o Freudenthal, se interesaron en explorar la sicología del razonamiento matemático y lo hicieron mediante estudios del tipo introspectivo, analizaron su propia actividad personal o estudiaron sistemáticamente las producciones de jóvenes escolares. Del mismo modo, la obra de Piaget tuvo una considerable influencia en el esclarecimiento del pensamiento humano, más específicamente sus estudios sobre la construcción de la noción de número, de las representaciones geométricas, del razonamiento proporcional y del pensamiento probabilístico, que han tenido una fuerte influencia en el entendimiento de las nociones matemáticas.

Aunque esos hallazgos han jugado un papel fundamental en el terreno de la investigación contemporánea, la currícula matemática y los métodos de enseñanza se han inspirado durante mucho tiempo sólo en ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y en métodos didácticos apoyados en la memoria y en la algoritmia, en los que con frecuencia el estudiante se encuentra imposibilitado de percibir los vínculos que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas en su vida cotidiana y se priva entonces de experimentar sus propios aprendizajes en otros escenarios distintos de los que le provee su salón de clase.

Si quisiéramos describir el proceso de desarrollo del pensamiento matemático tendríamos que considerar que éste suele interpretarse de distintas formas: por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otro lado, se entiende al pensamiento matemático como parte

de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas. Por último una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en las múltiples tareas cotidianas.

Desde esta última perspectiva, el pensamiento matemático no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana. Por tanto, se asume que la construcción del conocimiento matemático tiene muchos niveles y profundidades; por citar un ejemplo, elijamos el concepto de volumen, el cual es formado de diferentes propiedades y diferentes relaciones con otros conceptos matemáticos. Los niños de seis a siete años suelen ocuparse de comparar recipientes, quitarles y agregarles líquido y medir de algún modo el efecto de sus acciones sobre el volumen, aunque la idea de volumen no esté plenamente construida en su pensamiento. En tanto que algunas propiedades tridimensionales del volumen de los paralelepípedos rectos o los prismas —como por ejemplo las relaciones que se pueden encontrar entre longitudes, áreas y volúmenes— se abordan en la escuela cuando los jóvenes tienen entre 15 y 16 años; sólidos de revolución e integrales múltiples se estudian entre los 18 y 21 años; de manera que el pensamiento matemático sobre la noción de volumen se desarrolla a lo largo de la vida de los individuos. Por tanto, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela debería tomar en cuenta dicha evolución.

De este modo habremos de entender, en un sentido moderno, que el pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y, por otro, procesos del pensamiento avanzados, como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento mediante hipótesis. El pensamiento matemático, entonces, debe operar sobre una red compleja de conceptos, unos avanzados y otros más elementales. Quizás por eso los estudiantes no puedan entender lo que significa una ecuación diferencial al menos de que entiendan a un cierto nivel, que va más allá del sólo manejo de las técnicas asociadas, otros conceptos matemáticos, como la diferencial, la integral, la función, la variable o, incluso, el número, y además deben articularlos bajo diferentes contextos de representación, como formas gráficas, ordenamientos numéricos, representaciones analíticas, lenguaje natural o procesamiento icónico de la información.

Dado que, para un profesor, enseñar es crear las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes; para un estudiante, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y de objeto; tradicionalmente se ha considerado a la enseñanza de las matemáticas como una suerte de arte que libremente queda bajo el virtuosismo del profesor. El efecto de esa enseñanza sobre el aprendizaje del alumno, suele ser evaluada con relación al buen comportamiento escolar del estudiante, a la aprobación o reprobación del curso y no se discute mucho qué ocurre con el aprendizaje, se confunde pues la acreditación con el aprendizaje. En esta visión se supone que el aprendizaje de los alumnos depende exclusivamente de la atención que presten y del seguimiento que hagan a la exposición del profesor, del dominio que éste tenga tanto al nivel del arte en su enseñanza como al de su maestría en el tema. Esta visión, aunque domina en las aulas escolares contemporáneas, está cambiando paulatinamente y, en nuestra opinión, sus más profundas transformaciones aún están por llegar.

Ante estas prácticas escolares que bien podríamos llamar tradicionales, hoy en cambio emergen concepciones que señalan a la actividad matemática en un sentido más amplio, según las cuales dicha actividad no debe restringirse a las limitaciones puramente formales pues, como toda actividad humana, depende de una enorme variedad de restricciones de naturaleza cultural, histórica e institucional. Factores como la motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación, los aspectos lingüísticos o los de representación juegan un papel fundamental en la conformación de las ideas matemáticas entre los estudiantes.

Desde esta perspectiva, nuestra forma de aprender matemáticas no puede ser reducida a la mera copia del exterior, o digamos que a su duplicado, sino más bien es el resultado de sucesivas construcciones cuyo objetivo es garantizar el éxito de nuestra actuación ante una cierta situación. Una implicación educativa de este principio consiste en reconocer que tenemos todavía mucho que aprender al analizar los propios procesos de aprendizaje de nuestros alumnos. Nos debe importar, por ejemplo, saber cómo los jóvenes de bachillerato operan con los números, cómo entienden a la pendiente de una recta, como construyen y comparten significados relativos a la noción de función o cómo se explican a sí mismos la noción de azar. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza, según el cual el maestro enseña y el alumno aprende. Estos métodos permiten explorar y usar, para una enseñanza renovada, las formas naturales o espontáneas como los estudiantes piensan matemáticas. El papel del profesor es, en esta perspectiva, mucho más activo, pues, a diferencia de lo que podría creerse, sobre él recae mucho más la responsabilidad del diseño y la coordinación de las situaciones de aprendizaje.

Otra visión de aprendizaje que más recientemente se está poniendo a funcionar es conocida como la aproximación sociocultural del aprendizaje. Según está, se considera que la mente está más allá de la piel y, en esa medida, los procesos mentales humanos poseen una relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales. De modo que se presenta un marco a partir del cual es posible hablar de distintas formas de pensar matemáticas al considerar que el escenario modifica dichos pensamientos. Así encontramos en la literatura de este programa que se habla de la forma de pensar durante el siglo XIX, o bien, sobre el tipo de razonamiento de los estudiantes o del profesor en el salón de clase.

Según Régine Douady, destacada fundadora de la didáctica de la matemática en Francia, saber matemáticas implica dos aspectos. Por un lado, la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de herramienta en tanto que sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto y por otra parte, también implica identificar a las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Así se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de objeto. Al adquirir ese estatus, se descontextualizan y despersonalizan, lo cual permite su aprendizaje. Este proceso de descontextualización y despersonalización participa en el proceso de apropiación del conocimiento.

Para un profesor, enseñar es crear de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para un estudiante, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y de objeto. Para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial de la interacción entre el profesor y sus alumnos, es decir que el conocimiento sea una manifestación importante de los “juegos” de la escuela.

En seguida mostramos un ejemplo interesante de tratamiento del contenido, pues ha sido construido atendiendo a las formas como los estudiantes se comportan ante ciertas tareas, como aquéllas relativas al tratamiento didáctico del cálculo mental. Como sabemos, el cálculo mental es una actividad matemática que no precisa de la escritura y que puede desarrollarse en periodos breves del tiempo de una clase. Secuencias de cinco a diez minutos permiten a los jóvenes desarrollar habilidades de pensamiento que usaran en su formación posterior.

De manera verbal, el profesor propone operaciones por realizar mientras que los estudiantes escuchan y memorizan la pregunta. Después, éstos resuelven las operaciones y comunican al grupo y al maestro su resultado. A continuación

el profesor les demanda una explicación de sus cálculos, así favorece la discusión entres los diferentes métodos propuestos y busca que los estudiantes los defiendan o refuten. Ello tiene, por supuesto, una intención didáctica. Este proceso permite a los alumnos distinguir métodos y seleccionar aquellos más veloces o efectivos.

En esas actividades, los alumnos usan teoremas como herramientas, aunque no sean conscientes de emplearlos. Por ejemplo, ante la pregunta del maestro de cuánto es 11 por 11, un joven da como respuesta una cifra menor que 110. Otro alumno dice que esa respuesta no puede ser correcta, pues 11 por 10 es 110 y el ha obtenido algo menor que 110. Este argumento exhibe el uso del teorema: si $c>0$ y $a<b$, entonces $ac<bc$. En este momento el saber opera al nivel de herramienta, pues no se ha constituido como un resultado general aceptado socialmente entre los estudiantes en su clase. En otro momento lograrán escribir y organizar sus hallazgos y, en esa medida, reconocer resultados a un nivel más general. En este sentido, la evolución de lo oral a lo escrito es un medio para construir el significado y para el aprendizaje matemático. En ese proceso tendrá lugar la dialéctica herramienta-objeto.

Cuando un profesor se encuentra ante sus alumnos en su salón de clase, se espera que enseñe un conocimiento específico y que los estudiantes lo aprendan. Sin embargo, si no sabemos cómo trabaja el pensamiento matemático de los alumnos, no podremos, desde la enseñanza, ayudarlo a aprender. Las relaciones entre pensamiento y enseñanza son estudiadas ahora por diversos investigadores en el mundo entero.

Pasamos a describir, a un nivel introductorio, ciertas relaciones entre los procesos de enseñanza y los mecanismos del pensamiento matemático. Una cuestión fundamental de importancia contemporánea consiste en adecuar una instrucción, en el sentido más vasto del término, a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los contextos históricos, institucionales y culturales que requiere la actividad matemática. La tarea, como puede verse, no resulta simple. En una atmósfera donde la enseñanza se reduce a la comunicación de verdades eternas, resulta muy complejo plantear un rediseño sustentado en la exploración de verdades relativas. De este intento surge una interrogante básica: ¿de qué manera el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje de matemáticas puede afectar benéficamente a la enseñanza?

Una razón que nos sirve para explicar la complejidad del conocimiento matemático consiste en observar que la mayoría de las nociones matemáticas toman un papel dual: el de proceso y el de objeto, en función de la situación y del nivel de conceptualización del alumno.

Por lo común, el aprendizaje de un concepto incluye muchas etapas que pueden desarrollarse durante periodos muy prolongados de tiempo y que eventualmente quedan por completo fuera de un semestre escolar. Por ejemplo, se debe iniciar con el desarrollo de un proceso en términos concretos, y en la medida en que el alumno se familiarice con los procesos, éstos tomaran la forma de una serie de operaciones que pueden ser desarrolladas y coordinadas en su pensamiento, entonces el alumno habrá adquirido un pensamiento operacional con respecto a ese concepto. En una etapa posterior, la imagen mental de este proceso cristalizará en una nueva y única entidad, digamos que en un nuevo objeto. Una vez que éste ha sido adquirido, el estudiante habrá desarrollado cierta habilidad para pensar dicha noción, ya sea al nivel dinámico, como un proceso, o al nivel estático, como un objeto. Esto manejo dual posibilita al estudiante pensar en términos de posibilidades: "¿Que ocurrirá si hago o no hago cierta operación?"

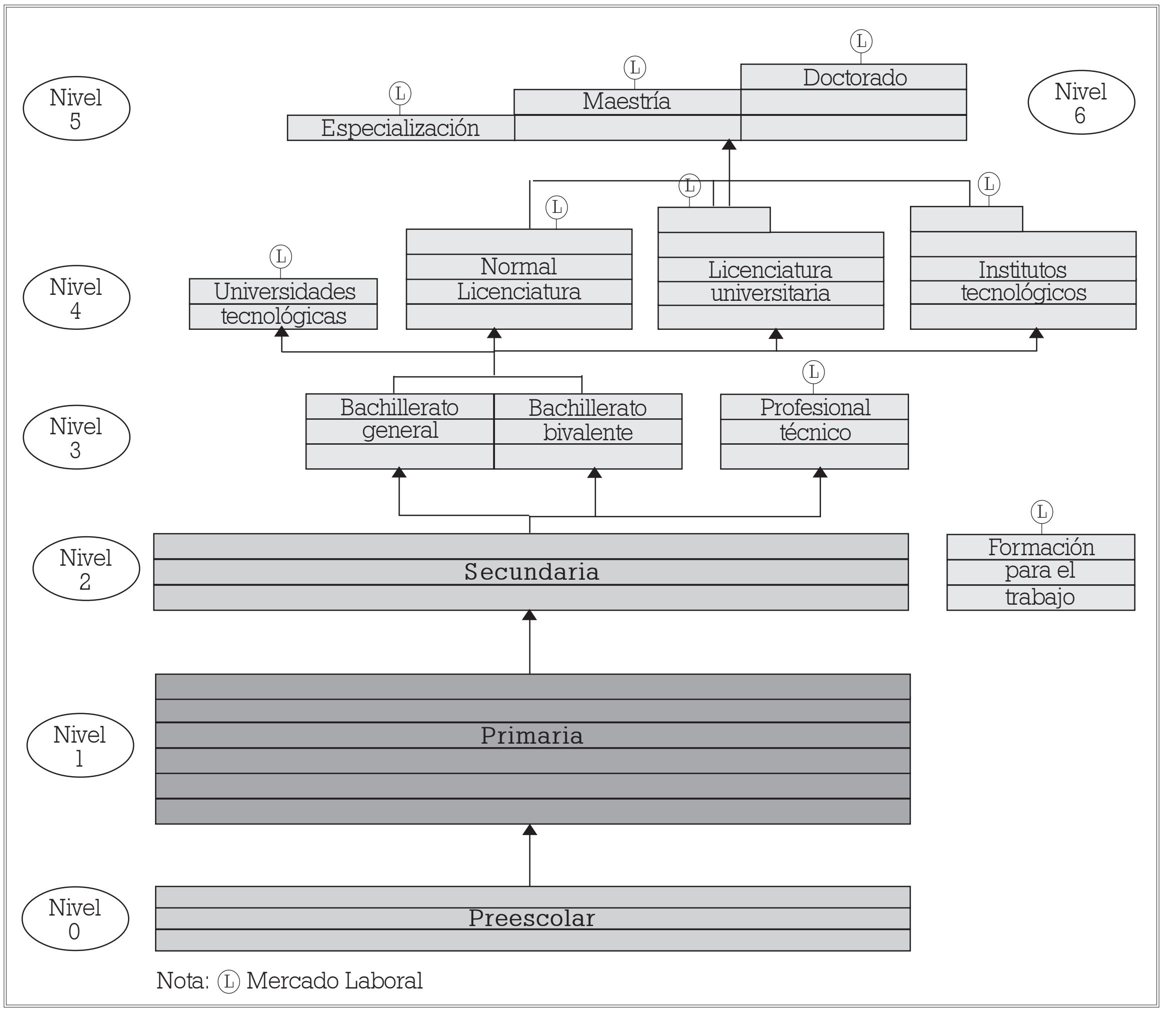
En esos términos, uno de los pasos más esenciales en el aprendizaje de las matemáticas es el de construir objetos matemáticos: es decir, hacer de un proceso un objeto. De modo que uno de los principales objetivos del currículo sería, desde esta perspectiva, desarrollar el pensamiento operacional, el pensamiento sobre un proceso, en términos de operaciones sobre objetos.

Dado que la matemática trata con números, variables o funciones, por citar algunos elementos, todos ellos pueden ser considerados como objetos. Esos objetos son articulados entre sí mediante relaciones en que cada objeto es a su vez parte de una estructura más amplia de objetos. Los procesos se componen de operaciones sobre esos objetos, y transforman a los objetos mismos. Por ejemplo, toda función específica puede ser considerada como un proceso que opera sobre números: los transforma en otros números y después será considerada como un objeto en sí misma, un objeto susceptible de transformaciones mediante otro proceso que se realice sobre ella, como por ejemplo derivarla, integrarla o graficarla. Esta dualidad proceso-objeto parece estar en la base de la construcción de los conceptos matemáticos.

De modo que la enseñanza de las matemáticas sacaría provecho de las investigaciones sobre el pensamiento matemático y sobre las formas en que se concibe al conocimiento matemático y a su construcción, si estas fuentes epistemológicas son analizadas en detalle. En la enseñanza usual, estos hechos suelen ser desconocidos tanto por los profesores como por los diseñadores de currículo o los autores de libros de texto, de manera que con frecuencia se corre el riesgo de perder un amplio espectro de posibilidades de enriquecer la acción didáctica.

Un profesor que conozca estos asuntos podrá reconocer la existencia de varias epistemologías: la del profesor, la del alumno o la del saber. En este momento, quizá la visión más extendida entre los profesores sea aquella que consiste en asumir que los conceptos matemáticos son entidades ya elaboradas y que sólo deben ser comunicados a sus alumnos en una enseñanza pulcra y libre de dificultades, olvidando que esos conceptos deben ser construidos por los estudiantes como herramientas que pueden aplicarse en varias situaciones.

Estructura del Sistema Educativo Mexicano



Los niveles educativos se dan con base en la Clasificación Internacional Normalizada de la Educación (CINE, versión 1997).

El sistema educativo mexicano

Según datos de la Secretaría de Educación Pública de México, en el ciclo escolar que inició en septiembre del 2000 en el sistema nacional de educación se matricularon casi 29 millones de alumnos, distribuidos de manera que 24 millones se encuentran en la educación básica; 2 millones 850 mil en la educación media y 1,833,300 en la educación superior. Por su parte, *grosso modo*, del total de los estudiantes que cursan la educación superior, la mayoría (94%) corresponden al grado superior, y el resto (6%) se encuentra adscrito al posgrado.

El cuadro muestra la pirámide del sistema de educación nacional, donde también se ubica la educación superior.

La variedad de opciones que ofrece el nivel educativo superior incluye a las universidades públicas autónomas, universidades públicas estatales, instituciones dependientes del Estado, instituciones privadas libres e instituciones privadas reconocidas por la Secretaría de Educación Pública, los gobiernos de los estados o los organismos descentralizados del Estado.

La participación del sector privado en el nivel superior, excluyendo a la educación normal, es de 24%. Además de las instituciones que ofrecen educación superior ya descritas, existen otras, adscritas a diversas dependencias del sector público, que imparten estudios especializados en áreas como la militar, la naval, la agropecuaria, la de salud y la de relaciones exteriores.

Las ofertas profesionales de licenciatura se agrupan en seis áreas, de acuerdo con criterios establecidos internacionalmente y que han sido asumidos por la ANUIES: ciencias naturales y exactas; educación y humanidades; ciencias agropecuarias; ciencias de la salud; ingeniería y tecnología, y ciencias sociales y administrativas.

La duración de los estudios universitarios varía entre escuelas e instituciones. Generalmente se cursan en cuatro o cinco años. La modalidad semestral es la más socorrida. Las escuelas y facultades por lo común ofertan más de una carrera. La calificación académica del profesorado de educación superior en México ha ido mejorando poco a poco. Muchos tienen licenciatura como nivel máximo de estudios, aunque cada vez hay más profesores con grado de maestría y doctorado y es de esperarse que en los siguientes diez años esta tendencia se consolide plenamente.

A pesar de la diversidad de instituciones y de la amplitud temática descrita en el apartado anterior, la matemática se enseña a casi la totalidad de estudiantes en este nivel. En términos generales, el conocimiento de la matemática del bachillerato: aritmética, álgebra, trigonometría, geometría analítica y precálculo se garantiza a todos los estudiantes universitarios. En algunos casos, cuando cursarán una carrera con una carga mayor de matemáticas, los estudiantes del bachillerato incluyen en su formación cursos de cálculo infinitesimal (cálculo diferencial e integral) y una introducción a la probabilidad y la estadística.

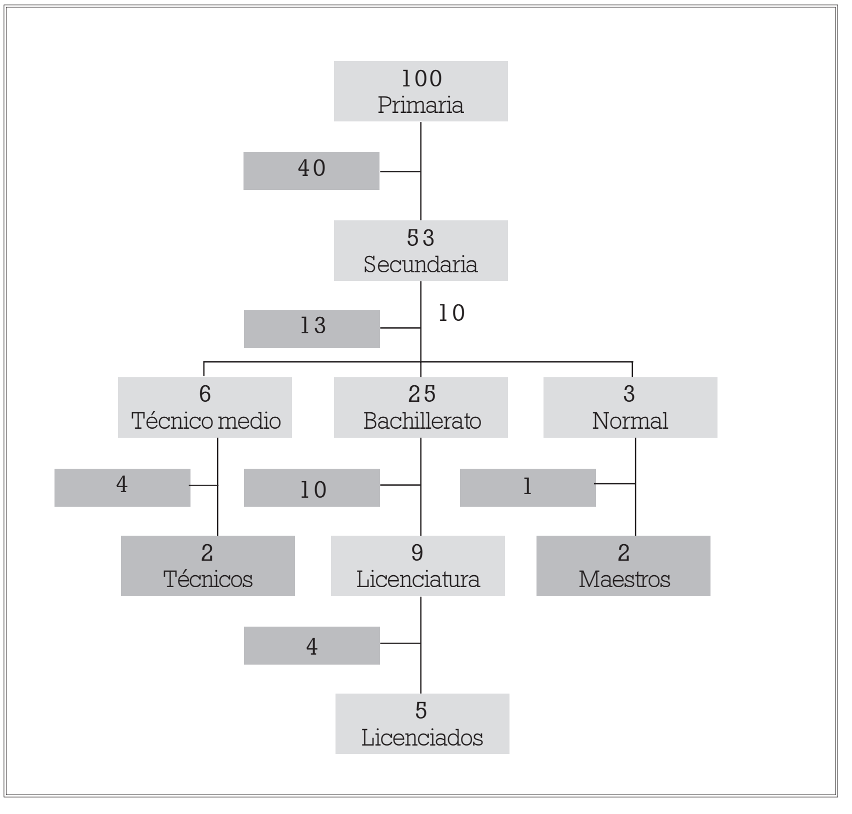
Durante el siglo XIX se consolidó el método de enseñanza simultánea, que presupone que los estudiantes de una clase estudian y aprendan los mismos contenidos en los mismos tiempos, el cual se opone al de enseñanza personalizada. Este cambio en la metodología de enseñanza trajo aparejado nuevos sistemas de selección del alumnado y, en consecuencia, una nueva función para la matemática en la escuela: la selección de los alumnos.

Datos recientes muestran que de cada 100 estudiantes que ingresan a la primaria sólo nueve alcanzan una habilidad terminal. Esto significa que de cada 100 alumnos que ingresan a la educación primaria, 40 son excluidos por razones de tipo socioeconómico y de selección académica. De esos 100, sólo 53 ingresan a secundaria, 13 son excluidos en el proceso y sólo 25 pasan al bachillerato, seis ingresan a escuelas para formación de técnicos medios y tres van a la educación normal. De éstos, sólo dos devienen técnicos y otros dos serán maestros. De los 25 alumnos que ingresaron al bachillerato, sólo nueve se inscriben en licenciatura, y de ellos, sólo cinco la concluyen. En este sentido, los dos egresados de una formación técnica, los dos egresado de una formación magisterial y los cinco egresados de una licenciatura son los nueve que alcanzan una habilidad terminal.

Esta situación es sin duda lamentable desde cualquier punto de vista, pues revela una incapacidad del sistema educativo de conservar en sus filas durante periodos más prologados, a sus estudiantes, y manifiesta un problema mayor de profundas consecuencias sociales.

Por lo regular, desde una óptica tradicional, suele creerse que los sistemas educativos, y en particular en matemáticas, son, por así decirlo, neutros, pues dispensan la misma información en

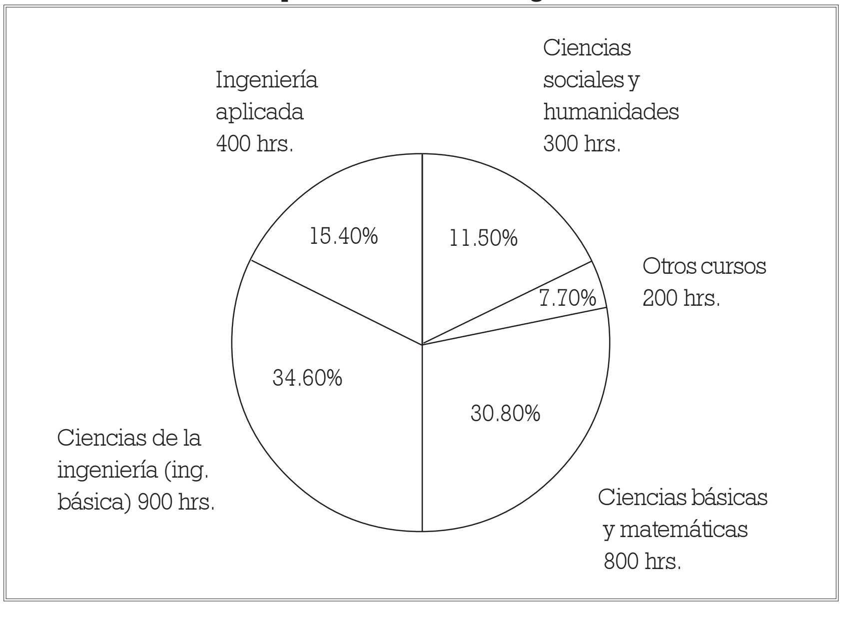
Una radiografía del Sistema Educativo Mexicano



los mismos tiempos a todos los estudiantes del país. Sin embargo, eso parece ponerse cada vez más en entredicho según se conocen los profundos desequilibrios entre una región y otra de nuestro país y entre los distintos estratos económicos o las diversas configuraciones étnicas. La exclusión afecta más a los más desfavorecidos.

Este panorama se ve agravado si se juzga a partir del papel que juega la matemática en el sistema escolar. Se le ha conferido una suerte de "mecanismo natural de selección". Digamos que, en la educación básica, el conteo y el manejo del espacio físico se acompañan de técnicas como el tratamiento de las fracciones. Este tema resulta difícil para la mayoría de los estudiantes. En la educación media básica y media superior, el álgebra es quizá el tema en que más estudiantes tienen dificultades, mientras que hacia el nivel superior es el cálculo el que ocupa el lugar que antes tuvieron las fracciones y el álgebra. Metafóricamente diríamos que nadie termina la secundaria si no maneja las fracciones, ni aprueba el bachillerato si tiene problemas con el álgebra, y tampoco egresa de licenciatura si no entiende el cálculo. Esto ha llevado a la comunidad de investigadores educativos a buscar alternativas didácticas que permitan no seleccionar a los estudiantes sino formar a los futuros profesionistas, que tanto falta hacen al país.

Tiempo de estudio de un ingeniero



El caso de la formación de los ingenieros es sintomática de lo que hemos querido decir en el párrafo anterior. Según se observa en la figura siguiente, un ingeniero dedica cerca de 80% del tiempo de estudio a las ciencias básicas, a las ciencias de la ingeniería y a la ingeniería aplicada. En cada una de ellas la carga matemática es considerable, y cada vez más este conocimiento especializado abarca carreras de otras áreas de concentración, como las ciencias sociales, las ciencias agropecuarias y las de la salud. Algunas de las carreras de leyes incluyen ya el estudio de la matemática en la formación de abogados.

Este intenso proceso de matematización de la currícula se ha visto acompañado, desafortunadamente, con carencias considerables, como no disponer de un verdadero sistema de formación de profesores y no contar con un programa nacional, interinstitucional y multidisciplinar para la elaboración de propuestas curriculares pertinentes en el campo de las matemáticas al nivel superior.

Elementos para un rediseño de la enseñanza de la matemática

Como una de tantas inercias que acompañan a las prácticas escolares, hemos asumido como símbolo de bienestar académico el que los porcentajes de deserción y reprobación escolar sean moderadamente pequeños, y en esa medida identificamos el progreso. Sin embargo, quienes miren de cerca las acciones de enseñanza e investigación sabrán que es posible permanecer en la escuela y acreditar las asignaturas con notas relativamente altas sin haberlas en verdad aprendido. Ahora bien, aunque el objetivo de lograr una tasa pequeña tanto en la deserción como en la reprobación sea deseable en todo sistema de enseñanza, claramente no es suficiente, pues una vez que ésta se ha alcanzado, el nuevo y urgente reto debe centrarse en la mejoría de la densidad y calidad del aprendizaje de nuestros estudiantes de una manera uniforme.

Datos recientes nos permiten asegurar que los porcentajes de reprobación en las asignaturas de, por ejemplo, cálculo en alguna institución en particular son similares a los que pueden alcanzarse en el sistema nacional de educación superior.[2] Esto se debe a que los criterios de acreditación, aunque regulados en lo general mediante políticas institucionales, son completamente arbitrarios en lo particular. De manera que un sistema de enseñanza, eficiente o no, puede tener los mismos resultados de reprobación con sólo modificar sus escalas y criterios internos de evaluación. ¿En qué se distingue entonces la calidad de un sistema y otro? Una posible y frecuente respuesta señala que la diferencia principal se ubica en el resultado final, es decir, en el desempeño profesional de los egresados, pues es entonces cuando los conocimientos y saberes que dominan entran en juego.

En particular debemos desarrollar una nueva mística en lo que respecta al trabajo docente, que no se le asuma más como una labor inercial y secundaria, sino como una verdadera actividad profesional, que no cesa en su misión si no logra el aprendizaje de sus alumnos. De parte del saber se requiere de lo que hemos llamado un “rediseño del discurso matemática escolar”, o sea, elaborar de nueva cuenta eso que habrá de ser aprendido por los alumnos. Mientras que de parte del alumno se debe impulsar una actitud que favorezca el desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Así habremos de revertir una de las ficciones educativas, según la cual los cursos se aprueban aunque no se aprendan.

Partimos de considerar que la labor del profesor de matemáticas debe valorarse desde la perspectiva de una actividad profesional. En este sentido, él debe participar de manera permanente en los procesos de perfeccionamiento profesional, en ellos proponemos contemplar tres ejes principales que pueden concebirse como una posible respuesta a las cuestiones siguientes: ¿cuáles son los conocimientos base para la enseñanza del profesor de matemáticas? Un complejo integrado de conocimientos teóricos, creencias y actitudes. ¿De qué manera un profesor puede aceptar como un conocimiento útil el aprender a enseñar, el aprender a observar procesos de aprendizaje y el aprender a aprender?

De manera tradicional, la atención de los investigadores se trasladaba hacia el papel desempeñado por el pensamiento del profesor como posible fundamento de la conducta. En los últimos años las investigaciones intentan proporcionar una nueva perspectiva desde la cual se contemple el papel del profesor durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, se centraron en analizar las características de lo que pudiera fundamentar las decisiones y acciones del profesor: el conocimiento, las creencias, las actitudes y los valores, así como la relación entre el conocimiento y la acción.

El nuevo marco conceptual derivado de esta traslación en el interés de las investigaciones contemplaba al profesor como poseedor de un cuerpo de conocimientos sobre la enseñanza originado, en parte, en su propia experiencia personal. Al mismo tiempo, se reconoció la posible modificación de dicho conocimiento al interactuar con nuevas situaciones. Desde esta perspectiva se pretendía proporcionar al docente un nuevo estatus dentro de los proyectos de investigación. La diferencia con la tradición anterior en las investigaciones estriba en que, en esos momentos, no se pretendía “normalizar” la práctica desde un conocimiento proveniente de las investigaciones, sino comprender lo que realmente sucedía en las aulas buscando los fundamentos, desde le punto de vista del propio profesor, de los actos realizados.

La problemática surge de la constatación de un hecho didáctico: nuestra enseñanza no produce aprendizaje. Nuestra práctica cotidiana lo constata. Nos preocupa una cierta variedad del aprendizaje que permite, a quien lo logra, transitar del conocimiento al saber, de la apropiación de los objetos matemáticos en situaciones didácticas simples, a su reconocimiento en situaciones no didácticas más complejas, rompiendo así las limitaciones del contrato didáctico. Este aprendizaje dota a los estudiantes de recursos que les permiten avanzar en sus cursos de especialidad y, sobre todo, en su vida profesional. Es un saber que se adquiere en el ámbito de la escuela pero se usa en el dominio de la profesión.

La enseñanza tradicional de la matemática que en términos generales se realiza en el sistema educativo, permite satisfacer los reclamos del contrato didáctico, pero no parece lograr un verdadero aprendizaje entre los alumnos.

Con frecuencia se tiene que tanto los textos como los programas de estudio, inmersos ambos en tradiciones educativas más amplias, distinguen incesantemente aquello que es riguroso y formal de lo que aparece como intuitivo e impreciso, confundiendo con ello las exigencias del campo disciplinar con el rigorismo en su enseñanza. En este sentido, nuestras propuestas desarrollan un conjunto de acciones que transforman a los propios contenidos de enseñanza.

Una visión integral de nuestra propuesta de investigación y desarrollo

Sin duda, los problemas provenientes de la práctica educativa los que inspiran, o debieran inspirar, la gran parte de las investigaciones en nuestra disciplina: la matemática educativa. La resolución de ellos es, en su mayoría, el objetivo final de los proyectos de investigación en nuestro campo; empero, en el momento actual y a pesar del gran cúmulo de resultados empíricos, no hay evidencia histórica de una metodología exitosa ni de ningún acercamiento teórico que explique la naturaleza del tránsito entre los resultados de la investigación didáctica y su puesta en escena en el sistema de enseñanza. Éste es uno de los grandes problemas abiertos de nuestra comunidad, en algún sentido señalados desde la ya célebre conferencia de Hans Freudenthal en Berkeley, hasta las últimas revisiones internacionales en la disciplina.[3] Pero, sobre todo, es un problema cotidiano y patente en los ámbitos propios de los protagonistas del hecho educativo: estudiantes, profesores, padres, investigadores, por mencionar algunos.

Algunos acercamientos internacionales

El proceso de preparar clases de matemáticas para los estudiantes puede describirse desde varios puntos de vista y con marcos teóricos diferentes. También implica el resolver los problemas de justificación, posibilidad e instrumentación (preparación de lo requerido para hacer posible la enseñanza de un tema matemático, sujeto a las restricciones impuestas por la sociedad, el sistema escolar, la calificación de maestros, etcétera) del contenido matemático, como una acción necesaria en el proceso. Resolver estos problemas involucra teoría y práctica además de un ataque simultáneo, no lineal sino, por decirlo de algún modo, en espiral.

Encontramos diversas explicaciones al proceso desde lo que la tradición alemana llama “elementarización”; es decir, “la transformación activa del contenido matemático a formas más elementales con una doble significación: ser fundamental y accesible para los grupos de estudiantes que lo reciban”.[4] O bien desde la tradición francesa con base en la teoría de la transposición didáctica, que describe el proceso ineludible y las variables que intervienen en el paso de conocimiento científico a conocimiento susceptible de ser enseñable y al enseñado realmente. Por ejemplo, la definición de “función” presente en los textos, conocida como “la definición formal”, se constituye como uno de los conocimientos escolares porque será enseñado y aprendido. Su justificación o validación (como “conocimiento enseñable”) se da a partir del consenso de la comunidad matemática (investigadores y profesores) que la ha adoptado para referenciar el concepto. Este conocimiento científico socializado, al que Chevallard se refiere como “conocimiento erudito (académico)”, que al ser validado como “conocimiento enseñable” genera tradiciones educativas, dándose el fenómeno de transposición[5] en el que los factores que determinan las sucesivas modificaciones que sufren los resultados científicos hasta llegar a ser “conocimientos enseñables” atienden a los reclamos y las ideologías de la sociedad y la administración del tiempo institucional, lo que da lugar a la presentación del contenido matemático en forma lineal y organizado en compartimentos con marcada carencia de significaciones. Ese “conocimiento enseñable” no considera dificultades epistemológicas ni cognitivas intrínsecas; menos aún las del estudiante para acceder a él. A la luz del fenómeno de la transposición didáctica de los saberes, se desprende el carácter ilusorio de los desarrolladores de currículos, quienes tienden a pensar que sus decisiones son objetivas en tanto que son elecciones deliberadas, olvidando que ellos mismos son parte del fenómeno.

También hay algunas revisiones puntuales de los resultados de las reformas curriculares en Estados Unidos[6], dónde se hace un llamado al uso de acercamientos eclécticos para enfrentar esta problemática, toda vez que la diferencia entre las declaraciones de los estándares de la National Council of Theachers of Mathematics (NCTM) y los resultados educativos reales es considerable. Mientras que unos dicen lo que desean los otros exhiben lo que obtienen.

Otro caso interesante es el concerniente a los esfuerzos renovadores en Alemania del Este y Austria, que concluye después de un análisis cuidadoso de diferentes reformas en el caso particular del cálculo, en las cuales la intención de establecer ideas fundamentales que subyacen o soportan al desarrollo curricular es en extremo limitado para incidir en los sistemas escolares reales.[7] Sus trabajos se perfilan hacia currículos más sencillos (como la preparación de una clase), pero con un conocimiento más completo de las interrelaciones que se dan en el hecho educativo, como creencias, salón de clase, cognición y metacognición, tanto de profesores como de estudiantes.

El escenario descrito, se extiende hacia el terreno nacional con las especificidades que impone nuestra propia tradición educativa. En este sentido, el trabajo del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN), que parte de la proclama de una "investigación para la acción", se ha planteado desde hace algunos años la cuestión de qué matemáticas deberíamos enseñar en la escuela, así como establecer los elementos que habrían de ponerse en juego para determinarla, y en su momento —y ésta es una pregunta actual— el cómo podríamos llevar pertinentemente nuestros resultados al sistema de enseñanza. El término "discurso matemático escolar" describe a los saberes en el escenario educativo y abre la posibilidad de hacer matemáticas para la escuela. Esta noción, para ser coherentes con la proclama, precisa de una acción de rediseño que atienda fundamentalmente a los reclamos de un sistema de enseñanza masificado específico:

> Lo que debe preocuparnos, para ser coherentes con nuestro punto de vista de la matemática como problema de comunicación, es el rediseñar el discurso matemático en la enseñanza de manera tal que enfrente al problema de la masificación y no que lo soslaye.[8]

Al momento las investigaciones en este sentido[9] dan cuenta de la plausibilidad del rediseño en partes y aspectos específicos del cálculo y del análisis matemático, cubriendo componentes epistemológicas, didácticas y cognitivas, de modo que ahora se está en condiciones de diseñar y probar puentes que comuniquen los resul-

tados de la investigación con su eventual incorporación en los sistemas de enseñanza. En esta línea se ubica una tendencia importante de la investigación actual en la didáctica de la matemática.

La ingeniería didáctica como una metodología *ad hoc*

La ingeniería didáctica constituye una metodología de investigación que se aplica tanto a las productos de enseñanza basados o derivados de la investigación, como a una metodología de investigación para las experimentaciones en clase. Su sustento teórico proviene de la teoría de la transposición didáctica y de la teoría de las situaciones didácticas;[10] de ambas se desprende la necesidad de dotar al estudio del fenómeno didáctico de un acercamiento sistémico. Con la primera se alcanza una dimensión global, en tanto que la segunda es de carácter local. En ese sentido la preparación de matemáticas para estudiantes no es un proceso de hacer elemental el conocimiento en cualquier sitio, ni adaptarlo a un conocimiento previo y habilidades cognitivas del estudiante. Se le percibe como una tarea didáctica que requiere un mayor análisis global de carácter sistémico.[11]

El término "ingeniería didáctica" surge a inicios de la década de los años 80, en analogía al quehacer en ingeniería, en tanto que éste no sólo se realiza apoyándose en resultados científicos, sino que involucra también una toma de decisiones sobre las diversas componentes implicadas en el proceso. Los fines de una ingeniería didáctica pueden ser tanto de investigación como de producción. Un aspecto relevante es el concerniente a la validación de resultados, que en el caso de la investigación descansa en un asunto interno basada en la confrontación entre el análisis *a priori* de la situación construida y el análisis *a posteriori* de la misma situación, bajo el principio de que la conducta del estudiante sólo puede ser entendida si se relaciona con la situación observada; esta situación y su potencial cognitivo deben ser caracterizados de antemano comparando el análisis *a priori* con lo observado. Esta posición de validación sólo puede darse si las situaciones que involucran la ingeniería son estrictamente controladas en lo relativo a los contenidos tratados, su puesta en escena, el papel del profesor, la administración del tiempo, etcétera. En tanto que la validación de una ingeniería de producción satisface las condiciones clásicas del trabajo de ingeniería, a saber, efectividad, potencia, adaptabilidad a diferentes contextos, etcétera.

Esta metodología contempla tres grandes fases: un análisis preliminar de la situación por abordar, involucrando la componente didáctica, es decir, acerca del estado de la enseñanza; la componente epistemológica, en tanto da explicación del devenir del contenido matemático en juego, asi como su funcionamiento y diversas formulaciones; y la componente cognitiva de la población que va a ser sometida a la ingeniería. La segunda fase la constituyen el diseño de la ingeniería y la elección de las variables macro y micro didácticas que van a ponerse en juego (por ejemplo, determinación del tratamiento del contenido, incorporación de estrategias de resolución de problemas, uso de tecnología, manera de conducir la clase, textos por usar, etcétera). Por último, la puesta en escena y el análisis de resultados.

Esta metodología, falible por cierto, nos ha parecido coherente en tanto que toma en cuenta la naturaleza eminentemente social del fenómeno educativo y, por ende, su acercamiento integral, sistémico. De paso se reconoce que la investigación en el aula no puede desligarse de la situación específica ni de los personajes que intervienen en ella, revalorizando el papel protagónico del profesor. Lo que no nos conduce a su adopción global hemos de considerarla como parte de nuestra reflexión al proponer nuestros propios acercamientos. Por ejemplo, los niveles escolares en Francia, en el que inciden la mayor parte de las investigaciones al respecto son el básico y el medio. Nuestro problema se localiza en el nivel superior, en donde no existe una homogeneidad en los objetivos de la enseñanza, podemos encontrarnos tantos como instituciones, y dentro de ellas diferentes programas aun para licenciaturas con el mismo nombre, sólo por citar un aspecto. En nuestro caso, el estudio didáctico puede derivar en el análisis de una situación particular y, por ende, no completamente generalizable.

Un ejemplo, el curso de precálculo

Ya hemos señalado por qué es necesario modificar el curso de precálculo al inicio de los estudios universitarios y la problemática alrededor de éste.[12] En el ámbito del curso tocaremos los antecedentes de nuestra investigación con cierto detalle. Por razón de espacio en este escrito, resumiremos, a nuestro juicio, los elementos más significativos.

Siguiendo la tónica antes descrita, abordaremos los resultados del análisis preliminar de nuestra investigación distinguiendo las componentes didáctica, epistemológica y cognitiva:

Estudio didáctico. Tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes sobre todo del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki. La enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado los argumentos visuales, por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas. Es decir, la concepción que de la matemática se tenga, permea la de su enseñanza, independientemente de los estudiantes a los que se dirige. A ello se aúna el contrato didáctico establecido, que como parte de la negociación impide que el estatus del profesor sea demeritado si éste no resuelve en forma satisfactoria los problemas planteados en el curso; el recurso algorítmico permite subsanar decorosamente lo establecido en el contrato y “aligera”, eliminando dificultades subyacentes al contenido matemático.

Estudio epistemológico. La naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos en la antigüedad vestigios del uso de correspondencias, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y representaciones a las que se enfrentan los estudiantes y profesores.

Una lista exhaustiva de obstáculos epistemológicos del concepto de función se encuentra en Sierpinska.[13]

Estudio cognitivo. Los objetos inmersos en el campo conceptual del cálculo (análisis) son particularmente complejos a nivel cognitivo, pues, como en el caso que nos ocupa, la función se presenta como un proceso cuyos objetos son los números: este mismo concepto deviene en objeto al ser operado bajo otro proceso, como la diferenciación (o integración), y así sucesivamente. De modo que al iniciar un curso de cálculo el estudiante debe concebir a la función como un objeto y por ende, susceptible de operación; de otro modo, ¿qué significa operar un proceso? En nuestras experiencias con profesores y estudiantes hemos constatado que si logran incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, no sólo manejan a la función como objeto sino que además transitan entre los contextos algebraico, geométrico y numérico versátilmente, es decir, si se tiene dominio del contexto geométrico tanto en la algoritmia, en la intuición como en la argumentación, es posible el tránsito entre las diversas representaciones. El problema estriba en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico; por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, por lo que se acude con facilidad al refugio algorítmico.

Los textos: una visión de las reformas y contrarreformas

El libro de texto desempeña un papel prioritario en nuestros sistemas de enseñanza. Lo concebimos como un objeto de representaciones en torno al cual se organiza toda una estructura imaginaria de saberes didácticos. En ella el libro representa, a la vez, el apoyo del saber y un instrumento de alineación. En este escrito presentamos, de manera resumida, algunas exploraciones sobre la figura de texto de cálculo en momentos de reforma y contrarreforma de las prácticas sociales escolares; mostramos un aspecto del origen y la naturaleza de las modificaciones de un discurso escolar determinado, y señalamos, por último, algunos quehaceres actuales que atienden a una visión sistémica en el campo de la investigación en la enseñanza de la matemática en Latinoamérica.

Cada época en la historia de la enseñanza del cálculo produce, mediante sus prácticas sociales cotidianas, conocimiento. Al establecerlo como un cierto paradigma temporal, forma lo que llamaremos una *estructura imaginaria de saberes didácticos*; en ella se condensan y precipitan a la vez diferentes consideraciones de los más diversos órdenes. Esta estructura se modifica abruptamente de una época a otra y hace de su historia una epopeya más que un soneto. En esta historia el libro de texto juega un papel protagónico, se constituye como un objeto pluridimensional que puede juzgarse desde diferentes enfoques. Es a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; e instrumento del poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes.[14]

Después del triunfo del método pedagógico de la enseñanza simultánea —que supone que todos los alumnos de una misma clase progresan a un mismo paso y siguen, por tanto, libros idénticos— el cálculo se introdujo en la enseñanza del bachillerato a finales del siglo pasado y con él el uso sistemático del libro de texto. Recientemente la enseñanza del cálculo ha tenido otros dos episodios destacados: las secuelas educativas que produjo, en muchos países, la reforma francesa de la matemática moderna, y la más reciente puesta en escena estadounidense de tecnología para la enseñanza. El primero modificó la estructuración teórica del contenido de los textos, mientras que el segundo parece estar movilizando las jerarquías de su argumentación discursiva.[15] Ambos movimientos se han originado por causas un tanto externas a la propia práctica educativa. Volveremos a ello más adelante.

Reformas y contrarreformas

La enseñanza del cálculo se encuentra de nuevo en un cruce de caminos y, como suele ocurrir, las reformas se suceden de reformas. Describamos brevemente tres componentes del escenario actual. Por un lado, las investigaciones en enseñanza de la matemática[16] han documentado a lo largo de los últimos 20 años, con un aceptable rigor metodológico, algunos de los efectos de las prácticas de enseñanza sobre el aprendizaje de los estudiantes. Prácticas inducidas por dos causas principales: las modificaciones debidas al movimiento de reforma de la matemática moderna, tanto al nivel del contenido como al de su filosofía, y por el súbito proceso de masificación de los sistemas de enseñanza superior. En otro costado se encuentra la cada vez más extendida presencia de los nuevos recursos tecnológicos diseñados *ex-professo* para la enseñanza escolar. Y como tercer componente vemos, en la gran mayoría de las propuestas actuales de cambio (la contrarreforma), aspectos de un mismo discurso matemático escolar[17] que como una didáctica normal —parafraseando a Khun— no cesa de imponer a las comunidades docentes un estilo discursivo para el cálculo escolar, cuya vigencia data de 1794. La existencia de éste tercer componente es, a nuestro juicio, la más clara expresión de la desarticulación evidente entre las dos primeras.

Analizaremos la figura de libro de texto y no la existencia de la nueva tecnología para la enseñanza. Buscamos aportar elementos para la reflexión que, como punto de partida, auxilien en los ensayos de aproximaciones didácticas que no sólo atiendan a los nuevos recursos sino que incorporen también en sus diseños aspectos de la realidad específica y sistémica en la que se encuentra nuestra escuela, pues si bien el cálculo es universal, su enseñanza no. Los acercamientos didácticos franceses, alemanes o estadounidenses, fieles a sus propias tradiciones, son distintos entre sí.[18] Nuestro asunto trata entonces del escenario latinoamericano y de cómo éste juega un papel en el proceso de cambio de finales de siglo.

El bicentenario de un paradigma didáctico: 1794-1994

En este apartado argumentamos en torno de la hipótesis que sostiene que el actual movimiento de contrarreforma plantea un nuevo currículo para el cálculo. Buscamos precisar en qué medida se logra y en cuáles de sus aspectos se torna notorio. Hemos elegido al texto como crisol de estudio, de modo que nuestro primer señalamiento será en relación con las ideas que estructuran los contenidos matemáticos de algunas de las diferentes propuestas de texto en este movimiento. Nos referimos al acercamiento simultáneo y coordinado de los aspectos numéricos, geométricos y analíticos —eventualmente en situaciones contextuales—, y muy particularmente a la noción matemática de linealidad local. Al respecto sostenemos que atribuir a la contrarreforma la originalidad de dicho aporte en la enseñanza del cálculo es impreciso; en todo caso, consideramos que hace de él un uso extensivo a través de la nueva tecnología disponible: la calculadora con capacidad de graficación y los programas didácticos para el manejo de representaciones múltiples en la microcomputadora. Para mostrarlo elegimos una serie de tres ejemplos tomados de otros tantos textos.

Con la fundación de *l'Ecole Polytechnique*[19] en Francia, se fortalece el proceso de matematización de la ingeniería, se favorece el establecimiento de la figura profesional del matemático y se concede la alta jerarquía de lo analítico a la matemática. En ese ambiente, el año 1841 vio nacer, como respuesta al programa de August Louis Cauchy de fundamentación del cálculo en los años veinte, el texto de Antoine Cournot,[20] donde se manifiesta partidario de una aproximación teórico-empirista que retomaba algunos de los elementos propuestos por Lacroix.[21] El texto de Cournot reunió a aquellos dos grandes tratados del siglo XVIII: *Introductio analysis infinitorum,* de Euler, y *Théorie des fonctions analytiques,* de Lagrange. De donde retoma como el objeto de estudio las funciones y lo funda sobre los principios del cálculo infinitesimal.

Cournot plantea que las funciones, ya sean matemáticas o empíricas, disponen de ciertas propiedades generales que son de importancia no sólo para la teoría abstracta del cálculo sino más bien para la interpretación de fenómenos naturales. Señala, además, la conveniencia de tratar a las funciones en sus representaciones múltiples, tablas de valores, gráficas, enunciados o fórmulas algebraicas. Citemos al respecto aquella que él mismo considera la más destacada de las propiedades de esas funciones, que consiste en saber que las variaciones del valor

Tratamiento numérico

I pour			II pour		
x=1.00	y=0.00000	différence	x=6.00	y=0.00000	différence
x=1.01	y=+0.00555+	0.00555	x=6.01	y=-0.01256	-0.01256
x=1.02	y=+0.01109+	0.00554	x=6.02	y=-0.02523	-0.01267
x=1.03	y=+0.01662+	0.00553	x=6.03	y=-0.01278	-0.01278
...	...	...	...	...	...

que tiene una función[22], a partir de un valor determinado, son sensiblemente proporcionales a las variaciones correspondientes de la variable dependiente, cuando estas variaciones son muy pequeñas. Comenta también que ya el lector habría visto una aplicación muy importante de este principio en la manera de usar las diferencias proporcionales anexas a las tablas de logaritmos. Con estos mismos elementos, dos siglos después, se han estructurado algunas de las propuestas actuales como la de Tall, de la Demana, Hughes o Callahan.[23]

Trataremos en seguida algunos ejemplos. Respetando el calendario, iniciamos con uno tomado del texto de Cournot. Considera a la función algebraica $f(x)=(x2–7x+6)/(x–7)$ representada por las dos ramas de la curva hiperbólica (*ilmn, suv*, en su notación) que se separan por una ordenada asintótica, correspondiente a la abscisa $x=10$. Presenta el cuadro *Tratamiento numérico* para apoyar su argumentación.

La ley de proporcionalidad se verifica con una gran aproximación en los dos casos, aunque los valores de y varían más rápidamente en el segundo caso que en el primero, para crecimientos iguales de x. Mientras se ha hecho variar el valor de x por grados iguales a un céntimo, la cual no es una fracción muy pequeña. Si hubiéramos puesto una serie de valores de x equidistantes por un milésimo, la proporcionalidad de variaciones correspondientes de y se tendría de una manera mucho más próxima.

Por su parte, Deborah Hughes *et al.* señalan que dos principios guían sus esfuerzos, el primero, al que llaman "the rule of three", dice que todo tópico debe ser presentado geométrica, numérica y algebraicamente. El segundo consiste en asumir que las definiciones formales y los procedimientos provienen de la investigación de problemas prácticos. Incorporan en su tratamiento el uso de la tecnología. Veamos como ejemplo la presentación de la derivada de $f(x)=x^2$. Notan que cerca de $x=1$, cada que el valor de x crece por *0.001*, el valor de x^2 crece aproximadamente por un valor de 0.002. Así que cerca de $x=1$ la gráfica es aproximadamente lineal con pendiente 0.002/0.001=2, lo cual exhiben en una serie de gráficas. En seguida tratan el problema de la determinación numérica.

x	x^2	*Difference in x^2 values*
0.998	0.996004	
0.999	0.998001	0.001997
1.000	1.000000	0.001999
1.001	1.002001	0.002001
1.002	1.004004	0.002003
x increments 0.001		all aproximately 0.002

Por último, en el texto de James Callahan *et al.* se dice, respecto de su punto de vista, que el cálculo puede ser para los estudiantes lo que fue para Euler y los Bernoulli: un lenguaje y una herramienta para explorar toda la fábrica de la ciencia. Ello obedece a su consideración de que gran parte de la fortaleza del cálculo radica precisamente en sus conexiones con otras ciencias. Proponen un acercamiento que utiliza las tecnologías actuales y estudia a las relaciones funcionales en el contexto de las ciencias y de la matemática. Veamos un ejemplo de la manera como opera su acercamiento. Se trata de encontrar $f'(27)$ de $f(x) = (2+x^3\cos x+1.5^x)/(2+x^2)$. Para ello, señalan que necesitan hacer una serie de acercamientos sobre la gráfica de f en el punto $(27, f(27)) = (27, 69.859043)$, muestran entonces imágenes que son una réplica a escala y retocada de lo que se verá en la supercalculadora. Señalan que la razón $f'(27)$ es la pendiente de la gráfica de f cuando magnificamos suficientemente la gráfica como para hacerla ver como una recta. Se preguntan sobre la necesidad de encontrar el valor numérico de la pendiente y para ello proponen la siguiente tabla:

Δx	Δy	$\Delta y/\Delta x$
0.08	$-2.11556615\mathrm{x}10^{-2}$	-0.264445769
0.008	$-2.17820241\mathrm{x}10^{-3}$	-0.272275301
0.0008	$-2.17882882\mathrm{x}10^{-4}$	-0.272353602
0.00008	$-2.17883489\mathrm{x}10^{-5}$	-0.272354362

Finalmente señalan que f'(27) = la pendiente de *la gráfica = lím*$\Delta y/\Delta x$ *cuando* $\Delta x \rightarrow 0$.

La similitud en el tratamiento de estos ejemplos es palpable, así como la coincidencia en la noción que se pretende resaltar, la linealidad local.

Aspectos generales de la reforma y la contrarreforma

La reforma de la matemática moderna introdujo en los años 60, cambios en la imagen y el funcionamiento del cálculo escolar. De este modo, por ejemplo, en los entonces nuevos libros de texto se produjeron cambios como el de anticipar al estudio propiamente del cálculo, el de sus fundamentos, y se introdujo de manera vigorosa el uso de los cuantificadores lógicos. Empero, el cambio fundamental se manifestó en la adopción de una nueva estructura axiomática que abarcaba por igual tanto a los números reales como a los conceptos tradicionalmente más fundamentales: función, límite, derivada e integral. El cambio de la fisonomía del contenido y de la filosofía asociada fue entonces notorio.

Otro tipo de cambios se manifestaron en cuanto a la seriación de los cursos de cálculo: se abandonó el acostumbrado crecimiento gradual en el número de variables reales (una, dos y tres variables) y se tornó de golpe del estudio del cálculo de funciones reales de una variable real al de funciones de R^n en R^m. Lo anterior cambió también la ubicación en la retícula escolar de los cursos de álgebra lineal y de ecuaciones diferenciales. Del primero se dio una introducción temprana, entre el curso básico de cálculo y el intermedio. Mientras que al segundo se le condenó a un abandono didáctico sin parangón en la historia reciente de la enseñanza. El cálculo se tornó entonces el antecedente del análisis matemático clásico y ya no más, como durante la primera mitad del siglo, como el compañero irremplazable de las ecuaciones diferenciales. Esta desarticulación ahondó el precipicio en el tratamiento dual de conceptos comunes al cálculo y a las ecuaciones diferenciales, como es el caso de la integral, la diferencial o la continuidad.

Otro de sus efectos se manifestó en el surgimiento de una nueva estratificación de saberes socialmente aceptada. Una especie de peyoración social de saberes presentó, por ejemplo, a las aplicaciones o a los acercamientos puramente simbólicos (que por una razón que nunca he entendido se insiste en oponerlos a los conceptuales), numéricos o visuales como entes de menor valía. Todos recordamos las viejas (¿qué tanto?) disputas entre aplicados o puros, formales e intuitivos. Situaciones cotidianas de nuestra escuela latinoamericana lo confirman; como esta anécdota de dos estudiantes durante esos años; uno de ellos, estudiante de ingeniería en la especialidad de geología y el otro de la licenciatura en física y matemáticas.

> Ing. —*Empecé mi curso propedéutico de matemáticas para la ingeniería.*
> Mat. —*Y ¿qué están viendo?*
> Ing. — *Los axiomas de Peano y las propiedades de campo de los reales, ¿y tú?*
> Mat. —*Yo también.*

Por su parte, la contrarreforma articula el discurso de los libros de texto al desarrollo de la tecnología. Estos acercamientos modifican las tradicionales entidades de un texto, tales como definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos o ejercicios, en la misma medida en que las tecnologías afectan las prácticas sociales. Veamos como ejemplo la definición que aparece en Callahan de pendiente de la gráfica en un punto (se refieren a la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto). Definición: la pendiente de una gráfica en un punto es el límite de la pendiente vista en un microscopio en el punto, cuando el campo de visión se encoge hacia cero.[24] O bien, en Demana se definen y distinguen los términos "*graph*" y "*the graph*" de una función en términos del aspecto que exhibe la componente visual de la información que aparece en una pantalla de cristal líquido de una supercalculadora.[25]

Por otra parte, aunque este proceso de modificación de la jerarquía en la presentación de argumentos en los textos permite introducir, de manera temprana, temas que hasta hace poco estaban mucho más al interior de los textos (por ejemplo, funciones trascendentes), la noción misma de: derivada y la de integral siguen conservando el estilo introducido por la reforma precedente. La integral sigue siendo la integral de Riemann y la derivada se conserva como la insinuada por D'Alambert y definida por Cauchy, aunque sea con más ejemplos numéricos, gráficos y analíticos. Es decir, conservan el significado y la presentación alcanzada con el acercamiento propuesto por el programa bourbakista.

El envejecimiento de la palabra "nuevo"

Revisemos otro aspecto de las reformas, estudiemos las tendencias en los artículos de cálculo de la *American Mathematical Monthly* desde su aparición en 1894 hasta 1994. Esta revista se consagra al tratamiento de la matemática escolar y en esa medida ha tenido una influencia en los textos de cálculo estadounidenses que, en muchos de los casos, se han usado en Latinoamérica. Elegimos artículos de tres periodos, en todos ellos se usó la palabra "nuevo" en la enseñanza del cálculo. Iniciemos con la introducción de su primer número (enero de 1894):

> *At the present time there is not Mathematical Journal published in the US sufficiently elementary to appeal to any [...] Most of our existing Journals deal almost exclusively with subjets beyond the reach of the average student or teacher of Mathematics or at least with subjects with which they are not familiar, and little, if any space, is devoted to the solution of problems […] While realizing that the solution of problems is one of the lowest forms of Mathematical research, and that, in general, it has no scientific value, yet its educational value can not be over estimated.*

En los dos primeros números del primer volumen, aparece un artículo cuyo título resulta a todas luces atractivo para el motivo de este artículo: "Application of the new education to the differential and integral calculus", de Fletcher Durell.[26] El autor presenta un método de enseñanza de la matemática, lo han llamado *new education,* y dice:

> *The student in each new advance is to begin with the concrete object, something which he can see and handle and perhaps make, and go on to abstractions only for the sake of realized advantages. Drawing is to precede formal Geometry (Euclid) and plotting of curves is to precede Analytical Geometry. In the course of the discussion it was remarked that the plotting of curves might be made a means of furnishing the fundamental notions in the Differential and Integral Calculus.*

En seguida presenta ejemplos de su uso. *Differentiation may now be provisionally defined as the method of finding the slope of a curve by the differential method*. También anota que éste se extiende de manera natural a la variable compleja. Por último comenta que este nuevo método concuerda con aquel de ir de lo conocido a lo desconocido por pasos continuos. Y sobre el entendimiento de los estudiantes dice: "The idea of slope is already firmly established in the mind of the student from the study of analytical Geometry" (*sic*).

En 1902 se publica *On limits*, en donde por primera vez aparece en ella el símbolo ε. En 1958, en pleno movimiento de reforma, se presenta el artículo "Bringing calculus up-to-date", de M. Munroe, *"about the modernization of the undergraduate calculus course [...] calculus has been in cold storage for over fifty years now".* En seguida de éste se publican una serie de artículos que daban cuenta de maneras "más sencillas", "más generales" para obtener la δ en función de ε en el usual tratamiento de límites y continuidad para diferentes funciones elementales. Esto se vio reflejado en los textos de entonces, que planteaban ejercicios y casos particulares de distintos teoremas del cálculo, para practicar la aritmética del ε–δ, una tarea cuasi

algorítmica. En los años 90 aparecen los "nuevos" acercamientos, apoyados en la supercalculadora.

Cálculo y cognición, la pareja ausente

El cálculo es un producto cultural y no sólo una colección de teoremas y algoritmos. Es un fruto de la actividad humana. Sobre él se han escrito, desde siglos pasados, tanto libros de texto como ensayos y artículos especializados. En torno de él se han organizado reuniones y congresos académicos. En la escuela contemporánea se enseña a los jóvenes desde los 15, 16 o 17 años. Es el antecedente indispensable de nuevas y diversas ramas de la matemática y de las ciencias. A partir de él se han revisado los fundamentos de la matemática y se ha articulado un gran cúmulo de extensiones a otras ramas del saber contemporáneo. Es una de las perlas de la historia del pensamiento científico.

Nos interesa hablar ahora del cálculo y la cognición.[27] Esta mezcla entre matemáticas y psicología sólo puede tener cabida si miramos al cálculo no como un producto terminado, una pieza más de la matemática, sino como la arena en donde se desarrolla una actividad humana. Ello resulta útil cuando estamos interesados en conocer el proceso de formación del pensamiento matemático y, en esa medida, la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. Es ahí donde ubicamos la figura de texto de cálculo. Hace unos 200 años, Lacroix escribió:

> *Je confesse mon ignorance sur la manière dont les idées de nombre et de grandeur s'acquièrent; et je me borne à examiner ici comment, avec ces matériaux déjà élaborés par une première instruction, empirique si l'on veut, on peut faire entrer dans des têtes de quinze à seize ans, la théorie élémentaire des*

> *sciences mathématiques et les formes des méthodes qui leur sont propres".*[28]

Esta ignorancia declarada de Lacroix sobre los aspectos cognitivos nos recuerda uno de los elementos comunes de las dos reformas: el no incorporar sistemáticamente las características cognitivas de aquellos a quienes se busca enseñar. Es decir, a pesar de la existencia y disponibilidad de diversos estudios respecto del cálculo, sigue prevaleciendo el tono voluntarista de quienes sostienen las "nuevas" propuestas.[29] Por ejemplo, con insistencia se señalan las bondades de contar con el acceso a las representaciones múltiples, y se ciegan los juicios de crítica al insinuar que con su sola introducción en la clase los problemas del aprendizaje se resolverán en el acto. Este desenfrenado abuso del éxito anunciado lleva habitualmente a un juicio erróneo: ¡la *x* es la culpable! En casi todas las introducciones se señala que el abuso en el acercamiento algebraico es uno de los principales problemas para lograr la "comprensión" en cálculo.[30]

Este énfasis en la culpabilidad del abuso de la algoritmia sugiere una supuesta incapacidad pretecnológica al uso de otros acercamientos. "Como no disponíamos de acercamientos, no podíamos ver lo maravilloso que resulta la rectitud local de las curvas que bosquejan a las gráficas de las funciones derivables," nos parece que es una idea falaz en dos sentidos:

- La investigación sobre cognición reporta dificultades para lograr la articulación de diversos registros de representación desde hace algunos años, en donde lo visual, por ejemplo, resulta complejo para muchos de los estudiantes y profesores.[31]
- Porque el uso de la representación simbólica algebraica tiene bondades interesantes. No es la malvada de la obra, y, en todo caso, sus dificultades están justo en la fuente de su fortaleza.

Un acercamiento que articula los dos señalamientos de las críticas anteriores se está realizando, particular en nuestras acciones de actualización de profesores de los ciclos medio y superior, desde el año 1982. En ellas hemos ensayado y adecuado un acercamiento al cálculo que se basa fundamentalmente en la incorporación de las componentes visual y numérica, aunándolas al manejo de representaciones simbólicas flexibles para permitir acrecentar el universo de formas en el repertorio de recursos del profesor.

Es necesario explorar el efecto que estas propuestas de la contrarreforma tienen en nuestros sistemas escolares, y no sólo escuchar los "cantos de sirenas" que anuncian un estupendo porvenir. El enunciado "enseñar para conocer y conocer para enseñar" adquiere ahora una vigencia renovada después de dos décadas de investigación en enseñanza de las matemáticas sobre los llamados temas avanzados (posalgebraicos), hoy se dispone de reportes sobre las dificultades que los estudiantes muestran respecto de diferentes nociones y procesos sobre todo de cálculo.[32] Se sabe, por ejemplo, de los problemas que los estudiantes manifiestan para establecer los vínculos entre las diferentes representaciones de conceptos como el de función o el de límite, o para interpretar de manera aislada alguna de tales representaciones y manipularlas en contextos específicos.[33] El reconocimiento de tales dificultades ha llevado a buscar una mayor precisión de la propia noción de aprender, y de ahí a las nociones de representación. Paralelamente, se han ensayado diferentes escenarios escolares para abordar la cuestión pedagógica de cómo tratar tales dificultades en clase.[34]

En esta perspectiva, nos encontramos ante una efervescencia creciente, sobre todo en Estados Unidos, del uso de recientes tecnologías, pues han abierto de manera generalizada el ámbito de representaciones poco tratadas en la escuela.[35] Aunque en tales aproximaciones siga dominando, como en los textos de la contrarreforma, el tono voluntarioso de quienes sostienen las propuestas pero desatienden a los resultados de la investigación epistemológica y cognitiva disponible. Este artículo procurará una explicación de algunos de los distintos trabajos de investigación de nuestro equipo.[36] Debemos aclarar que estas reflexiones no buscan descalificar las propuestas, ni mucho menos echar en saco roto un esfuerzo como el que han emprendido editoriales, asociaciones e instituciones educativas.

Los libros de texto para cálculo son entidades protagónicas de las prácticas sociales en el ambiente de la escuela. Resulta indispensable una visión crítica de sus principios y de sus propuestas de articulación con otros elementos del proceso escolar, para hacer un balance adecuado de su funcionamiento. Los dos movimientos de reforma que hemos estudiado se califican por igual como "nuevos" y materializan sus propuestas en los textos.

Hemos analizado la figura de texto escolar en momentos de cambio, de búsqueda de alternativas didácticas. Hemos señalado que éste es un condensado de las sociedades que lo producen, y en esa medida sugerimos emprender la ardua labor de elaborar materiales didácticos para nuestros alumnos atendiendo a los resultados que la investigación en enseñanza de la matemática nos reporta. Empero, hoy día el texto escolar se ve acompañado, en su labor didáctica, de otros medios, y su funcionalidad cambia.

Ante la falsa dicotomía no se puede pensar matemáticamente si no se cuenta con una supercalculadora, o no se puede pensar matemáticamente cuando se cuenta con una supercalculadora, que puede provocar en nuestras comunidades encarnizadas batallas intelectuales (¿y de las otras?) sin una clara ganancia específica para nuestros sistemas de enseñanza, debemos oponer una actitud crítica, científica y democrática.

Estamos de nuevo ante un fenómeno de gran dimensión. La contrarreforma se apoya en la gran industria de las comunicaciones mediante diferentes organismos de financiamiento de la actividad académica. Éste es un hecho inevitable del que habrá que sacar provecho para las prácticas educativas. Sin embargo, dado que somos una comunidad acostumbrada a la traducción de textos y al uso sistemático de propuestas que no fueron pensadas para nuestros sistemas educativos,[37] resulta importante estudiar y manejar el proceso de una manera adecuada que coordine los conocimientos disponibles mundialmente con nuestras particularidades regionales. Debemos considerar aspectos relativos al papel de la escuela latinoamericana, la relación que se establece entre el texto y el lector),[38] el papel que desempeña el profesor, así como el repertorio de que dispone y la manera en la cual ellos se comportan ante el conocimiento.[39] Preguntarse incluso, considerando las características de sociedades con escaso nivel de manejo tecnológico cómo en éstas se incorpora la tecnología y qué papel juegan en ese proceso los libros de textos.

En seguida enlisto algunos hallazgos de estudios que se encuentran en fase de desarrollo y que están vinculados con los textos de cálculo. En un estudio realizado en la región sur mexicana con profesores de matemáticas de bachillerato y universidad se obtuvieron datos como éstos:

- Veinte años después de la reforma (en un momento en el que supuestamente el profesor habría ya incorporado las nuevas propuestas a su práctica), quienes se habían formado antes de la reforma, no podían leer de manera satisfactoria los nuevos libros de modo que seguían usando los textos de la primera mitad del siglo.
- Los nuevos maestros, aquellos que sí habían estudiado en los nuevos textos, la mayoría conferían a la estructura sintáctica un mayor rango social que a la discusión de ideas o conceptos, de modo que podríamos decir que sabían poco cálculo.
- La visualización es una actividad compleja que lograban después de trabajo intenso sobre el tópico, de hecho quienes pidieron dominarla sabían ya los otros acercamientos.

Un estudio más reciente sobre la incorporación de la tecnología en el aula nos ha reportado que:

- El primer uso que se hace del instrumento está subordinado a las prácticas precedentes.
- La tendencia entre la mayoría de los profesores es que ésta es útil para una etapa posterior al aprendizaje, no para la acción de aprender. Sus conocimientos didácticos se han visto inmutables, siguen creyendo que la integral de Riemann es "la integral" y que el límite es esencial para aprender cálculo.

Otro estudio sobre la manera en la que los profesores llevan la información de los textos a los apuntes de sus alumnos muestra que son una copia malhecha del libro y que el texto se usa con flexibilidad sólo en sus aspectos algorítmicos. Otro estudio con auxilio de tecnología muestra a un profesor que utiliza sus conocimientos analíticos dominantes y, en cambio un estudiante avanzado, adicto a intuiciones y descripciones corporales; no así otros estudiantes. Proponemos entonces estudiar el efecto de los nuevos cambios en nuestros sistemas de enseñanza y desde ahí trabajar en el diseño de propuestas propias que, obvio es decirlo, sin ignorarlos se nutran de sus posibilidades.

Mediante una traducción de la lengua de origen (no siempre de las unidades empleadas ni del contexto de que se sirve —como la tradicional altura con h—) hemos enfrentado el arduo camino de preparar materiales para los alumnos. Los textos de cálculo no son la excepción, los encontramos en un sinnúmero de presentaciones y orígenes. No hacemos un llamado a quemar textos extranjeros ni a cerrar las puertas a los nuevos, sino más bien señalamos la necesidad de iniciar proyectos para la elaboración de materiales didácticos que tomen en cuenta a los actores directos de la acción educativa, atendiendo incluso las grandes diferencias regionales que suelen presentarse en nuestros ambientes de enseñanza. Nuestros estudiantes y profesores no son sujetos asociales, ahistóricos ni pertenecen a sociedades homogéneas. Todo ello merece de nuestra parte un esfuerzo mayor y más profundo.

Notas

1. Las fuentes principales de este artículo son: Alanís, Juan Antonio. "Estudio para el rediseño del discurso didáctico del cálculo en las escuelas de Ingeniería". Instalación y desarrollo de un lenguaje variacional. Disertación doctoral inédita, Cinvestav del IPN, México, 1996; Alanís, Juan Antonio, Ricardo Cantoral *et al*. *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas, México, 2000; y Cantoral, Ricardo "Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas", *Revista EMA: Investigación e innovación en Educación Matemática*, 1997, vol.2, núm.2 pp.115 – 131, y diversos informes de la Secretaría de Educación Publica (SEP).
2. *La educación superior en México,* (serie Temas de Hoy en la Educación Contemporánea, 1) ANUIES 1994.
3. Biehler Rolf *et al*. (eds.). *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Kluwer Academic Press, 1994; Johsua, Samuel y Josip Dupin. *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques,* Presses Universitaires de France. 1993 ; y Nesher, Perla y Jeremy Kilpatrick. (eds.). *Mathematics and cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Cambridge University Press, 2001.
4. Biehler, *op. cit.*,p.11.
5. Chevallard, Yves. *La transposition didactique,* La pensée Sauvage Editions, 1991.
6. Fey, James. "Eclectic approaches to elementarization: cases of curriculum construction in the United States", en Rolf Biehler *et al*. (eds.), *Didactics of Mathematics as a scientific discipline,* Kluwer Academic Publishers, 1994, pp.15-26.
7. Tietze, U. Mathematical curricula and the underlying goals, en Rolf Biehler *et al*. (eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline,* Kluwer Academic Publishers, 1994, pp.41-53.
8. Imaz, Carlos. "¿Qué es la matemática educativa?", *Memorias de la Reunión Centroamérica y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* 1987, vol.1, núm.1, pp.267-272.
9. Cantoral, Ricardo. (ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal*, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000; Cantoral, Ricardo. "*Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas",* disertación doctoral inédita, Cinvestav IPN, 1990; y Farfán, Rosa María. *Ingeniería didáctica. Un estudio de la variación y el cambio,* Grupo Editorial Iberoamérica, 1997; Miranda, Eduardo. "El entendimiento de la transformada de Laplace: el caso de una descomposición genética", disertación doctoral inédita, Cinvestav-IPN, 2001; Mirón, Hugo. "Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones $f <-> f'$ en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas, disertación doctoral inédita, Cinvestav-IPN, 2000; Pulido, Ricardo. "Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar", disertación doctoral inédita, Cinvestav-IPN, 1998; y Salat, Ramón. "Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal del cálculo", disertación doctoral inédita, Cinvestav-IPN, 1993.
10. La teoría de situaciones didácticas introducida por Guy Brousseau (Brousseau, Guy "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en didactique des mathématiques,* 1986, vol.7, núm.2, pp.33-115). Basada en una aproximación constructivista, opera bajo el principio de que el conocimiento se construye a través de la adaptación a un ambiente que, al menos en parte, aparece problemático al sujeto. Provee de una teoría para el control de situaciones de enseñanza en su relación con la producción matemática del conocimiento. Los sistemas didácticos considerados distinguen tres

componentes mutuamente interrelacionados, a saber, el maestro, el estudiante y el conocimiento.
11.Artigue, Michèle. "Ingénierie didactique", *Recherches en didactique des mathématiques*,1990, vol.9, núm.3, pp.281-308.
12. Farfán, Rosa María. "El curso de precálculo: un enfoque gráfico", *Memorias de la Reunión Centroamérica y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* 1991, vol.5, núm.1, pp.206-211.
13. Sierpinska, Ana. "On understanding the notion of function", *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy,* Dubinsky & Harel (eds.), MAA, notes 25, 1992, pp.23-58.
14. Choppin, Alain. "L'histoire des manuels scolaires: une approche globale", *Histoire de l'éducation*, 1980, vol.9, núm.4, pp.1-25.
15. Al primero le llamaremos "reforma" y al segundo, sólo por cuestión de calendario, "contrarreforma".
16. Usamos el término "enseñanza de la matemática" como unificador, en este escrito, de diversos términos regionales, como "educación matemática" en la tradición anglosajona, "matemática educativa" en México, Panamá y Guatemala, *didáctica de la matemática* usado tanto en Francia como en Alemania y España.
17. Este término fue introducido en la literatura por el profesor Carlos Imaz (1987) y ha sido desarrollado en varios trabajos con una caracterización implícita.
18. Véase Rolf Biehler *et al.*, *Op.cit.*
19. Recuérdese que la Politécnica es una "escuela de poder" que se dedica a la formación de ingenieros de élite con un vasto soporte analítico en el que la matemática desempeña un papel fundamental.
20. El decía «cette rigueur extrême, si recherchée maintenant de quelques personnes».
21. Lacroix, Sylvestter. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral,* 1797.
22. Está usando la palabra "función" para describir, propiamente, a sus imágenes.
23. Callahan, James *et al*. *Calculus in context*, W. H. Freeman & Co., 1993; Hughes, Deborah *et al*. *Calculus,* John Wiley & Sons, Inc., 1992; y Tall, David *et al*. *Graphics calculus I, II, III*, (*BBC compatible software*), Glentop Press, 1986.
24.Callahan, James *et al*., *Op. cit*.
25.Demana, Franklyn y Bert Waits. *Calculus,* Addison-Wesley, 1992.
26. Este escrito fue presentado a la sociedad matemática de Nueva York unos meses antes, por lo que la publicación nos hace suponer un cierto interés de la comunidad ante el tema tratado.
27. Cantoral, Ricardo. "Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición", *Memorias de la Reunión Centroamérica y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* 1993, vol.7, núm.1, pp.397-410; y Este escrito fue presentado a la sociedad matemática de Nueva York unos meses antes, por lo que la publicación nos hace suponer un cierto interés de la comunidad ante el tema tratado.
28. Lacroix, Sylvester. *Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier,* 1805.
29.Recuérdese aquella propuesta de Laplace: «Préférez dans l'enseignement les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en méme temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles» (*Journal des séances de l'École normal*).
30. Steen, Leen. (ed.). *Calculus for a new century; a pump, not a filter*, MAA, notes 8, 1987.
31. Ocampo, Juan. "La dimensión gráfica de los conceptos de límite y derivada", *Memorias de la Reunión Centroamérica y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* 1992, vol.6, núm.1, pp.82-87.
32. Tall, David (ed.). *Advanced mathematical thinking,* Kluwer Academic Publishers, 1991.
33. Mamona, Joanna. "*Calculus-Analysis*: A review of recent educational research", *Memorias del Simposio Internacional de Investigación en Educación Matemática,* 1990, vol.2, núm.1, pp.11-36.
34. Cantoral, Ricardo. "Acerca de la intuición del rigor. Notas para una reflexión didáctica", *Memorias de la Reunión Centroamérica y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, 1992, vol.6, núm.1, pp.24-29.
35. Fey, James (ed.). *Calculators in Mathematics education*, NCTM, 1992.
36. Grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN en México, D. F.
37. Basta con analizar los indicativos internacionales —como *Rapport mondial sur l'éducation 1993* UNESCO— y confrontarlos con la propia realidad de nuestros diversos sistemas educativos para ubicar las diferencias con aquellas otras regiones para las cuales fueron originalmente elaboradas las propuestas.
38. Codocedo, Teresa. "Acerca de un curso tradicional de cálculo diferencial en ingeniería", *Memorias de la Reunión Centroamérica y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, 1991, vol.6, núm.1, pp.189-193 ; y Hidalgo, Javier. "La lectura, un recurso olvidado en la enseñanza aprendizaje de la matemática", *Memorias de la Reunión Centroamérica y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* 1992, vol.6, núm.2, pp.153-158.
39. Ocampo, Juan. *Op. cit.*

Otras referencias

Cantoral, Ricardo. "Un problema de la educación matemática: la formación de profesores", *Cuadernos del Seminario de Café y Matemáticas*, Facultad de Ciencias-UNAM, 1989, vol.5, núm.1, pp.20-33.

Cauchy, August Louis. *Cours d'analyse de l'Ecole Royal Polytechnique,* 1821.

Cordero, Francisco. "Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar" disertación doctoral inédita, Cinvestav-IPN, 1994.

Cournot, Antoine. *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal,* 1841.